Dr. Boris Düdder, MSc. Jan Bessai, MSc. Andrej Dudenhefner

Übungen zur Vorlesung

Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt Nr. 7

Abgabetermin: 05.01.2016, 10:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.
Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich. 15.12.2015

Wir wünschen euch allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein erfolgreiches Jahr 2016.

Aufgabe 1 (Intuitionistisch nicht gültige Formeln) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Formeln:

1. $\varphi_2 = ((p \to q) \to p) \to p$
2. $\varphi_4 = \neg\neg p \to p$
3. $\varphi_6 = (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$
4. $\varphi_8 = \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$
5. $\varphi_{10} = ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

nicht intuitionistisch gültig sind. Orientieren Sie sich dabei an den Ausführungen aus Beispiel 2.4.7 (entspricht Aufgabe 2.7.9 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998).

Aufgabe 2 (Natürliche Deduktion) (4 Punkte)
Geben Sie natürliche Deduktionsbeweise der Formeln

1. $\vdash \bot \to p$
2. $\vdash p \to \neg\neg p$
3. $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$
4. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
5. $\vdash (\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$
6. $\vdash ((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$
7. $\vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$

aus Beispiel 2.1.1 aus Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (entspricht Aufgabe 2.7.3 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998).

Aufgabe 3 (Eine partielle Ordnung in Boolschen Algebras) (2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Relation $\leq$, die in einer Boolschen Algebra durch die Bedingung

   $$a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$$

   definiert ist, eine partielle Ordnung ist. Zeigen Sie also, dass $\leq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

2. Zeigen Sie $a \cap b \leq a$.

3. Zeigen Sie $a \leq b \Leftrightarrow a \cap b = a$.

4. Zeigen Sie, dass die Operationen $\cup$ und $\cap$ die kleinste obere bzw. die größte untere Grenze in Bezug auf $\leq$ darstellen. Es ist zu zeigen, dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

   (a) $\forall a, b : a \cap b \leq a$ und $a \cap b \leq b$ (analog für $\cup$).

   (b) $\forall a, b, c : c \leq a$ und $c \leq b \Rightarrow c \leq a \cap b$ (analog für $\cup$).

5. Zeigen Sie, dass die Konstanten 0 und 1 das kleinste bzw. das größte Element in Bezug auf $\leq$ darstellen.

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 2.7.4 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.