

Übungen zur Vorlesung
Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt Nr. 7

Abgabetermin: 05.01.2016, 10:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.

Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich.

15.12.2015

Wir wünschen euch allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein erfolgreiches Jahr 2016.

Aufgabe 1 (Intuitionistisch nicht gültige Formeln)

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Formeln:

1. $\varphi_2 = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
2. $\varphi_4 = \neg\neg p \rightarrow p$
3. $\varphi_6 = (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $\varphi_8 = \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
5. $\varphi_{10} = ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

nicht intuitionistisch gültig sind. Orientieren Sie sich dabei an den Ausführungen aus Beispiel 2.4.7 (entspricht Aufgabe 2.7.9 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998).

Aufgabe 2 (Natürliche Deduktion)

(4 Punkte)

Geben Sie natürliche Deduktionsbeweise der Formeln

1. $\vdash \perp \rightarrow p$
2. $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$
3. $\vdash \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$
4. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
5. $\vdash (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$
6. $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
7. $\vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$

aus Beispiel 2.1.1 aus Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (entspricht Aufgabe 2.7.3 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998).

Aufgabe 3 (Eine partielle Ordnung in Booleschen Algebras)

(2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Relation \leq , die in einer Booleschen Algebra durch die Bedingung

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$$

definiert ist, eine partielle Ordnung ist. Zeigen Sie also, dass \leq reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

2. Zeigen Sie $a \cap b \leq a$.
3. Zeigen Sie $a \leq b \Leftrightarrow a \cap b = a$.
4. Zeigen Sie, dass die Operationen \cup und \cap die kleinste obere bzw. die größte untere Grenze in Bezug auf \leq darstellen. Es ist zu zeigen, dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:
 - (a) $\forall a, b : a \cap b \leq a$ und $a \cap b \leq b$ (analog für \cup).
 - (b) $\forall a, b, c : c \leq a$ und $c \leq b \Rightarrow c \leq a \cap b$ (analog für \cup).
5. Zeigen Sie, dass die Konstanten 0 und 1 das kleinste bzw. das größte Element in Bezug auf \leq darstellen.

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 2.7.4 aus Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.