Dr. Boris Düdder, MSc. Jan Bessai, MSc. Andrej Dudenhefner

Übungen zur Vorlesung

Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt Nr. 3

Abgabetermin: 24.11.2015, 10:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.
Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich. 17.11.2015

Arbeite Kapitel 1 aus dem Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 soweit durch, dass mindestens die Definitionen, Beispiele und Sätze verstanden sind.

Aufgabe 1 (Projektion) (2 Punkte)
Geben Sie λ-Terme P_n und $\pi_1 \dots \pi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle λ-Terme Q_j

$$(P_n Q_1 \dots Q_n)\pi_i =_\beta Q_i$$

gilt.
(Aufgabe entspricht 1.7.16 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 2 (Churchnummerale) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

1. $A_* \; c_n \; c_m = c_{n \cdot m}$
2. $A_e \; c_n \; c_m = c_{n^m}$, falls $m > 0$.

Es gelte:

- $c_n := \lambda sz.s^n(z)$
- $A_* := \lambda xys.x \; (y \; s)$
- $A_e := \lambda xy.y \; x$

Hinweis: Schaut Euch den Beweis der Tatsache, dass $A_+ c_n c_m = c_{n+m}$ gilt auf Seite 12 des Buches Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 an.
(Aufgabe entspricht 1.7.14 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 3 (Auswahl) (2 Punkte)
Geben Sie einen λ-Term B_n für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für jedes Churchnummeral c_i mit $1 \leq i \leq n$ und alle λ-Terme Q_j

$$B_n c_i Q_1 \dots Q_n =_\beta Q_i$$

gilt.

(Aufgabe entspricht 1.7.15 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 4 (Fixpunktkombinator) (2 Punkte)

Sei $\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.M$ eine Abkürzung für $\lambda x_1.\lambda x_2 \ldots \lambda x_n.M$. Sei

$$
\begin{aligned}
? &= \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)\\
\$ &= ??????????????????????????
\end{aligned}
$$

Zeige, dass $ ein Fixpunktkombinator ist, d.h. es gilt $\$\ F =_\beta F\ (\$\ F)$.

Hinweis: Folgende Beobachtungen könnten hilfreich sein:

- ? abstrahiert über 26 Zeichen.
- $thisisafixedpointcombinato$ enthält 26 Zeichen.
- $ enthält 26 Vorkommen von ?.

(Aufgabe entspricht 1.7.17 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 5 (Prädezessor) (2 Punkte)

Definiere einen λ-Term P, so dass

$$
\begin{aligned}
P\ c_0 &=_\beta c_0 \text{ und}\\
P\ c_{n+1} &=_\beta c_n
\end{aligned}
$$

gilt.

Es ist also ein λ-Term P gesucht, welcher die Prädezessorfunktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(0) = 0$ und $p(n+1) = n$ auf den natürlichen Zahlen realisiert.

Hinweis: Man kann den gleichen Trick verwenden wie in dem Beweis, dass λ-definierbare (λ-definable) Funktionen abgeschlossen unter der primitiven Rekursion sind. (Kleene hatte diesen Einfall während eines Zahnarztbesuchs unter Einfluss von Lachgas.)

(Aufgabe entspricht 1.7.20 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)