

Übungen zur Vorlesung
Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt Nr. 3

Abgabetermin: 24.11.2015, 10:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.

Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich.

17.11.2015

Arbeite Kapitel 1 aus dem Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 soweit durch, dass mindestens die Definitionen, Beispiele und Sätze verstanden sind.

Aufgabe 1 (Projektion)

(2 Punkte)

Geben Sie λ -Terme P_n und $\pi_1 \dots \pi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle λ -Terme Q_j

$$(P_n Q_1 \dots Q_n) \pi_i =_{\beta} Q_i$$

gilt.

(Aufgabe entspricht 1.7.16 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 2 (Churchnummerale)

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

1. $A_* c_n c_m = c_{n \cdot m}$
2. $A_e c_n c_m = c_{n^m}$, falls $m > 0$.

Es gelte:

- $c_n := \lambda s z. s^n(z)$
- $A_* := \lambda x y s. x (y s)$
- $A_e := \lambda x y. y x$

Hinweis: Schaut Euch den Beweis der Tatsache, dass $A_+ c_n c_m = c_{n+m}$ gilt auf Seite 12 des Buches Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 an. (Aufgabe entspricht 1.7.14 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 3 (Auswahl)

(2 Punkte)

Geben Sie einen λ -Term B_n für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für jedes Churchnummerale c_i mit $1 \leq i \leq n$ und alle λ -Terme Q_j

$$B_n c_i Q_1 \dots Q_n =_{\beta} Q_i$$

gilt.

(Aufgabe entspricht 1.7.15 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 4 (Fixpunktkombinator) (2 Punkte)

Sei $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. M$ eine Abkürzung für $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. M$. Sei

$? = \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\textit{thisisa fixedpointcombinator})$
 $\$ = \text{????????????????????????????????}$

Zeige, dass $\$$ ein Fixpunktkombinator ist, d.h. es gilt $\$ F =_{\beta} F (\$ F)$.

Hinweis: Folgende Beobachtungen könnten hilfreich sein:

- $?$ abstrahiert über 26 Zeichen.
- *thisisa fixedpointcombinato* enthält 26 Zeichen.
- $\$$ enthält 26 Vorkommen von $?$.

(Aufgabe entspricht 1.7.17 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 5 (Prädezzessor) (2 Punkte)

Definiere einen λ -Term P , so dass

$$P c_0 =_{\beta} c_0 \text{ und} \\ P c_{n+1} =_{\beta} c_n$$

gilt.

Es ist also ein λ -Term P gesucht, welcher die Prädezzessorfunktion $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $p(0) = 0$ und $p(n + 1) = n$ auf den natürlichen Zahlen realisiert.

Hinweis: Man kann den gleichen Trick verwenden wie in dem Beweis, dass λ -definierbare (λ -definable) Funktionen abgeschlossen unter der primitiven Rekursion sind. (Kleene hatte diesen Einfall während eines Zahnarztbesuchs unter Einfluss von Lachgas.)

(Aufgabe entspricht 1.7.20 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)