MSc. Jan Bessai, MSc. Andrej Dudenhefner, Dr. Boris Düdder

Übungen zur Vorlesung

Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt Nr. 11

Abgabetermin: 01.02.2017, 10:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.
Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich. 25.01.2017

Im folgenden betrachten wir die Minimale Intuitionistische Logik erweitert um die Regelmenge M. Für jedes M gelten die Regeln der Minimalien Intutionistschen Logik:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash_M \varphi}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash_M \psi}{\Gamma \vdash_M \varphi \to \psi}(\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash_M \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash_M \varphi}{\Gamma \vdash_M \psi}(\to E)$$

Außerdem gelten die in M enthaltenen Reglen, z.B. für $M = \{(\neg\neg E)\}$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \bot \vdash_{\{(\neg\neg E)\}} \bot}{\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E)\}} \varphi}(\neg\neg E)$$

Aufgabe 1 (Abstracted Double Negation Elimination) (2 Punkte)
Zeigen Sie Remark 8.1.4 aus LHCI, d.h. mit der Regel

$$\frac{\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E')\}} (\varphi \to \bot) \to \bot}{\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E')\}} \varphi}(\neg\neg E')$$

gilt für alle Γ und φ: $\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E)\}} \varphi$ genau dann wenn $\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E')\}} \varphi$. Zeigen sie, dass im λ_Δ-Kalkül für alle Γ, φ und M, sodass $\Gamma \vdash M : (\varphi \to \bot) \to \bot$ ein N existiert, sodass $\Gamma \vdash N : \varphi$.

Aufgabe 2 (Pierce's Law) (2 Punkte)
Zeigen Sie Remark 8.1.6 aus LHCI, d.h. mit den Regeln

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash_{\{(P),(\bot E)\}} \varphi}{\Gamma \vdash_{\{(P),(\bot E)\}} \varphi}(P) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\{(P),(\bot E)\}} \bot}{\Gamma \vdash_{\{(P),(\bot E)\}} \varphi}(\bot E)$$

gilt für alle Γ und φ: $\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E)\}} \varphi$ genau dann wenn $\Gamma \vdash_{\{(P),(\bot E)\}} \varphi$.
Zeigen Sie, dass mit den Regeln

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \bot \vdash_{\{(P\bot),(\bot E)\}} \varphi}{\Gamma \vdash_{\{(P\bot),(\bot E)\}} \varphi}(P\bot) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\{(P\bot),(\bot E)\}} \bot}{\Gamma \vdash_{\{(P\bot),(\bot E)\}} \varphi}(\bot E)$$

gilt, für alle Γ und φ: $\Gamma \vdash_{\{(\neg\neg E)\}} \varphi$ genau dann wenn $\Gamma \vdash_{\{(P\bot),(\bot E)\}} \varphi$.
Konstruieren Sie λ_Δ-Kalkül Ableitungen der Regeln $(P), (P\bot)$ und $(\bot E)$ analog zur vorherigen Aufgabe.

Aufgabe 3 (Kontroll Operatoren) (3 Punkte)

Leiten Sie die Reduktionsschritte für die folgenden Kontrolloperatorreduktionen her:

1. $\mathcal{A}(M) \equiv \mathcal{F}(\lambda d.M)$, $d \notin FV(M)$: $E\,[\mathcal{A}(M)] \longrightarrow_{\mathcal{A}} M$
2. $\mathcal{C}(M) \equiv \mathcal{F}(\lambda k.M(\lambda w.\mathcal{A}(kw)))$: $E\,[\mathcal{C}(M)] \longrightarrow_{\mathcal{C}} M(\lambda z.\mathcal{A}(E[z]))$
3. $\mathcal{K}(M) \equiv \mathcal{C}(\lambda k.k(Mk)) : E[\mathcal{K}(M)] \longrightarrow_{\mathcal{K}} E[M(\lambda z.\mathcal{A}([E]z))]$