MSc. Jan Bessai, MSc. Andrej Dudenhefner, Dr. Boris Düdder

Übungen zur Vorlesung

Logische Methoden des Software Engineerings

Wintersemester 2016/2017

Übungsblatt Nr. 3

Abgabetermin: 16.11.2015, 14:00 Uhr

Aufgaben(teile) mit der Markierung $\boxed{\star}$ sind Zusatzaufgaben.
Gemeinsame Abgaben von Gruppen bis zu 4 Personen sind möglich. 10.11.2016

Arbeite Kapitel 1 aus dem Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 soweit durch, dass mindestens die Definitionen, Beispiele und Sätze verstanden sind.

Aufgabe 1 (Churchnummerale) (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

1. $A_+ \ c_n \ c_m = c_{n+m}$
2. $A_* \ c_n \ c_m = c_{n \cdot m}$
3. $A_e \ c_n \ c_m = c_{n^m}$, falls $m > 0$.

Es gelte:

- $c_n := \lambda sz.s^n(z)$
- $A_+ := \lambda xypq.xp \ (ypq)$
- $A_* := \lambda xys.x \ (y \ s)$
- $A_e := \lambda xy.y \ x$

Hinweis: Schaut Euch den Beweis der Tatsache, dass $A_+c_nc_m = c_{n+m}$ gilt auf Seite 12 des Buches Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998 an. (Aufgabe entspricht 1.7.14 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 2 (Auswahl) (2 Punkte)
Geben Sie einen λ-Term B_n für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für jedes Churchnummeral c_i mit $1 \leq i \leq n$ und alle λ-Terme Q_j

$$B_n c_i Q_1 \ldots Q_n =_\beta Q_i$$

gilt.
(Aufgabe entspricht 1.7.15 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 3 (Projektion) (2 Punkte)
Geben Sie λ-Terme P_n und $\pi_1 \ldots \pi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ an, so dass für alle λ-Terme Q_j

$$(P_n Q_1 \ldots Q_n)\pi_i =_\beta Q_i$$

gilt.
(Aufgabe entspricht 1.7.16 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 4 (Fixpunktkombinator) (2 Punkte)
Sei $\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.M$ eine Abkürzung für $\lambda x_1.\lambda x_2 \ldots \lambda x_n.M$. Sei

$$? = \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$
$$\$ = ??????????????????????????$$

Zeige, dass \$ ein Fixpunktkombinator ist, d.h. es gilt $\$\ F =_\beta F\ (\$\ F)$.
Hinweis: Folgende Beobachtungen könnten hilfreich sein:

- ? abstrahiert über 26 Zeichen.
- $thisisafixedpointcombinato$ enthält 26 Zeichen.
- \$ enthält 26 Vorkommen von ?.

(Aufgabe entspricht 1.7.17 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 5 (Negation) (2 Punkte)
Definiere einen λ-Term **neg** so, dass

$$\mathbf{neg\ true} =_\beta \mathbf{false}$$
$$\mathbf{neg\ false} =_\beta \mathbf{true}$$

gilt.
(Aufgabe entspricht 1.7.18 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)

Aufgabe 6 (Prädezessor) (2 Punkte)
Definiere einen λ-Term P, so dass

$$P\ c_0 =_\beta c_0 \text{ und}$$
$$P\ c_{n+1} =_\beta c_n$$

gilt.
Es ist also ein λ-Term P gesucht, welcher die Prädezessorfunktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $p(0) = 0$ und $p(n+1) = n$ auf den natürlichen Zahlen realisiert.
Hinweis: Man kann den gleichen Trick verwenden wie in dem Beweis, dass λ-definierbare (λ-definable) Funktionen abgeschlossen unter der primitiven Rekursion sind. (Kleene hatte diesen Einfall während eines Zahnarztbesuchs unter Einfluss von Lachgas.)
(Aufgabe entspricht 1.7.20 im Buch Sørensen, Morten Heine B., Urzyczyn, Paweł: Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, 1998.)